МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
математической физики
и информационных технологий

С.А. Переселков

14.06.2022г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.15 Теория вероятностей и математическая статистика

1. Код и наименование специальности:

14.05.02 Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг.

2. Специализация:

Проектирование и эксплуатация атомныхстанций.

3. Квалификация выпускника: инженер-физик

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0803 кафедра математической физики и информационных технологий

6. Составители программы: д.ф-м.н., профессор, заведующий кафедрой, Переселков Сергей Алексеевич

7. Рекомендована:

Научно-методическим советом физического факультета,протокол №6 от 14.06.2022г.

8. Учебный год: 2023/2024 **Семестр(ы):** 4

9.Цели и задачи учебной дисциплины:

Цель дисциплины: дать студентам знания по основам теории вероятности и математической статистике; изложение основных сведений, необходимых при построении и анализе математических моделей, учитывающих случайные факторы; развитие и формирование логического и алгоритмического мышления; интеллекта и инженерной эрудиции; научного мышления.

Основные задачи дисциплины:

- изучение основ теории вероятностей и математической статистики;

- овладение важнейшими методами исследования случайных величин, вычисления их основных характеристик, генерирования псевдослучайных чисел с заданным распределением, статистического анализа выборок, выявления взаимосвязей между признаками объектов статистической совокупности, измеренными в различных шкалах;

- приобретение знаний и навыков моделирования случайных событий, обработки статистических данных, точечного и интервального оценивания параметров распределений, проверки статистических гипотез, регрессионного и корреляционного анализа данных;

- формирование умения интерпретировать результаты вероятностных и статистических исследований и применять их при решении практических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к дисциплинам базовой части цикла Б1. В дисциплине рассматриваются понятийный аппарат, вероятностные и статистические модели, которые необходимы студентам для освоения параллельно читаемого курса «Статистическая физика».

«Теория вероятностей и математическая статистика» относится к числу фундаментальных разделов современной математики. Знание основ теории вероятностей и математической статистики является важной составляющей общей математической культуры выпускника.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен использовать базовые знания естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и	ОПК-1.1	Знает основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функции комплексного переменного, теории вероятностей и математической статистики	Демонстрирует знания фундаментальных законов природы и основных физических и математических законов.

	экспериментального исследования	ОПК-1.6	Рассчитывает основные характеристики случайных величин	Применяет физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 4/144.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			4 семестр
Аудиторные занятия		68	68
в том числе:	лекции	34	34
	практические	34	34
	лабораторные	0	0
Самостоятельная работа		40	40
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0
Форма промежуточной аттестации		36	36
Итого:		144	144

13.1. Содержание дисциплины:

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Основные понятия теоремы теории вероятностей. Алгебра событий. Повторение испытаний.	Предмет теории вероятностей. Виды случайных событий. Классическое и статистическое определение вероятности события. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Отклонение относительной частоты от вероятности в независимых испытаниях.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571

1.2	Случайная величина. (Одномерный случай).	Случайная величина: дискретная и непрерывная. Закон распределения. Функция распределения случайной величины: определение, свойства, график. Плотность распределения вероятностей: определение, свойства, вероятностный смысл. Вероятность попадания в заданный интервал. Математическое ожидание случайной величины: определение, свойства. Начальные	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571
		и центральные моменты. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины: определение, свойства. Мода и медиана. Характеристическая функция, ее свойства. Примеры законов распределения дискретной, случайной величины: биноминальный, пуассоновский, геометрический. Примеры законов распределения непрерывной, случайной величины: равномерный, показательный, нормальный.	
1.3	Многомерные случайные величины.	Двумерная случайная величина: дискретная и непрерывная. Функция распределения: определение, свойства. Плотность совместного распределения вероятностей: определение, свойства вероятностный смысл. Плотность вероятностей, составляющих двумерной случайной величины. Условные законы распределения: определение, свойства. Условное математическое ожидание. Нормальный закон распределения на плоскости. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированность и зависимость случайных величин. Линейная регрессия. Случайные функции. Математическое ожидание. Дисперсия. Корреляционная функция. Стационарные случайные функции. Эргодические функции. Функция случайного аргумента. Функция двух случайных аргументов. Распределение Пирсона, Стьюдента, Фишера-Снедекора. Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571

1.4	Математическая статистика.	Понятие выборки. Статистическое оценивание параметров распределения. Основные свойства оценок. Оценка мат. ожидания и дисперсии по выборке и ее свойства. Метод наибольшего правдоподобия. Доверительный интервал. Построение доверительного интервала для мат. Ожидания. Построения доверительного интервала для дисперсии. Проверка статистических гипотез. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Выбор статистического критерия. Проверка гипотезы о равенстве мат. ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571
		2. Практические занятия	
2.1	Основные понятия теоремы теории вероятностей. Алгебра событий. Повторение испытаний.	Предмет теории вероятностей. Виды случайных событий. Классическое и статистическое определение вероятности события. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Отклонение относительной частоты от вероятности в независимых испытаниях.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571
2.2	Случайная величина. (Одномерный случай).	Случайная величина: дискретная и непрерывная. Закон распределения. Функция распределения случайной величины: определение, свойства, график. Плотность распределения вероятностей: определение, свойства, вероятностный смысл. Вероятность попадания в заданный интервал. Математическое ожидание случайной величины: определение, свойства. Начальные и центральные моменты. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины: определение, свойства. Мода и медиана. Характеристическая функция, ее свойства. Примеры законов распределения дискретной, случайной величины: биноминальный, пуассоновский, геометрический. Примеры законов распределения непрерывной, случайной величины: равномерный, показательный, нормальный.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571

2.3	Многомерные случайные величины.	Двумерная случайная величина: дискретная и непрерывная. Функция распределения: определение, свойства. Плотность совместного распределения вероятностей: определение, свойства вероятностный смысл. Плотность вероятностей, составляющих двумерной случайной величины. Условные законы распределения: определение, свойства. Условное математическое ожидание. Нормальный закон распределения на плоскости. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированность и зависимость случайных величин. Линейная регрессия. Случайные функции. Математическое ожидание. Дисперсия. Корреляционная функция. Стационарные случайные функции. Эргодические функции. Функция случайного аргумента. Функция двух случайных аргументов. Распределение Пирсона, Стьюдента, Фишера-Снедекора. Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571
2.4	Математическая статистика.	Понятие выборки. Статистическое оценивание параметров распределения. Основные свойства оценок. Оценка мат. ожидания и дисперсии по выборке и ее свойства. Метод наибольшего правдоподобия. Доверительный интервал. Построение доверительного интервала для мат. Ожидания. Построения доверительного интервала для дисперсии. Проверка статистических гипотез. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Выбор статистического критерия. Проверка гипотезы о равенстве мат. ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=18571

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Основные понятия теоремы теории вероятностей. Алгебра событий. Повторение испытаний.	8	8	0	10	36

2	Случайная величина. (Одномерный случай).	8	8	0	10	36
3	Многомерные случайные величины.	8	8	0	10	36
4	Математическая статистика.	10	10	0	10	36
	Итого:	34	34	0	40	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:
- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Яковлев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика / В.П. Яковлев. — 3-е изд. — Москва: Дашков и Ко, 2012. — 182 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115779)
2	Маталыцкий М.А. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы / М.А. Маталыцкий; Хацкевич Г. А. — Минск: Высшая школа, 2012. — 720 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136001)
3	Балдин К.В. Теория вероятностей и математическая статистика / К.В. Балдин; Башлыков В. Н.; Рокосуев А. В. — 2-е изд. — Москва: Дашков и Ко, 2010. — 473 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=116308)
4	Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Колемаев; Калинина В. Н. — Москва: Юнити-Дана, 2010. — 353 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=118479)
5	Лисьев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика / В.П. Лисьев. — Москва: Евразийский открытый институт, 2010. — 200 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90420)
6	Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4-х ч Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика. 4. Операционное исчисление. / А.П. Рябушко. — 3-е изд. — Минск: Высшая школа, 2010. — 336 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=119723)
7	Гусева Е.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / Е.Н. Гусева. — Москва: Флинта, 2011. — 220 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83543)

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Юрайт, 2013. — 478 с.
2	Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: [Учебник для студ. вузов, обуч. по экон. специальностям] / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: ЮНИТИ, 2010. — 550 с.
3	Туганбаев А.А. Теория вероятностей и математическая статистика / А.А. Туганбаев, В.Г. Крупин. – СПб.: Лань, 2011. – 224 с. (ЭБС «ЛАНЬ» http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=652)

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1	www.lib.vsu.ru - ЗНБ ВГУ
2	http://e.lanbook.com/ - ЭБС «Лань»
3	http://www.book.ru/ - ЭБС «Book.ru»

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Яковлев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика / В.П. Яковлев. – 3-е изд. – Москва: Дашков и Ко, 2012. – 182 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115779)

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Большая физическая аудитория им. М.А. Левитской
Специализированная мебель, ноутбук, проектор, экран для проектора
Microsoft Windows 10, LibreOffice, Adobe Reader
Компьютерный класс, помещение для самостоятельной работы
Специализированная мебель, компьютеры с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	1. Основные понятия теоремы теории вероятностей. Алгебра событий. Повторение испытаний. 2. Случайная величина. (Одномерный случай) 3. Многомерные случайные величины. 4. Математическая статистика.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.6	КИМ № 1 КИМ № 2 Перечень экзаменационных вопросов Перечень практических заданий

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

20.1.1 Перечень заданий для контрольных работ.

Контрольная работа № 1

Вариант 1	*Вариант 2*
Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей: $f(x)=\begin{cases}C\exp\{-0.2x\}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ *Найти константу* C, *функцию распределения* $F(x)$, *математическое ожидание* $M[X]$, *дисперсию* $D[X]$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(0<X<1)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*	*Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:* $f(x)=\begin{cases}C, x\in[-1;1]\\ 0, x\notin[-1;1]\end{cases}$ *Найти константу* C, *функцию распределения* $F(x)$, *математическое ожидание* $M[X]$, *дисперсию* $D[X]$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(0<X<0.5)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*
Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей: $f(x)=C\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}$ *Найти константу* C, *функцию распределения* $F(x)$, *математическое ожидание* $M[X]$, *дисперсию* $D[X]$ *и среднее квадратическое*	*Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:* $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-C\exp\{-0.2x\}, x\ge 0\end{cases}$ *Найти константу* C, *плотность вероятности* $f(x)$, *математическое ожидание* $M[X]$, *дисперсию* $D[X]$ *и среднее квадратическое*

отклонение $\sigma[X]$, $P(-2 < X < 4)$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Найти моду и медиану.

отклонение $\sigma[X]$, $P(0 < X < 0.2)$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Найти моду и медиану.

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, \mathrm{x} \in (-\infty;-2) \\ \mathrm{C(x+2)}, \mathrm{x} \in [-2;2] \\ 1, \mathrm{x} \in (2;\infty) \end{cases}$$

Найти константу C, плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $\mathrm{M[X]}$, дисперсию $\mathrm{D[X]}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$, $P(0 < X < 1)$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Найти моду и медиану.

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$F(x) = 0.5 + \Phi(x-1)$, где

$$\Phi(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\mathrm{t}} \exp(-\mathrm{t}^2/2)\mathrm{dt}$$

Найти константу C, плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $\mathrm{M[X]}$, дисперсию $\mathrm{D[X]}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$, $P(-2 < X < 4)$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Найти моду и медиану.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
P	$\mathrm{p}(0)$	$\mathrm{p}(1)$	$\mathrm{p}(2)$	$\mathrm{p}(3)$	$\mathrm{p}(4)$	$\cdots$

где $\mathrm{p(k)} = \frac{(0.1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\exp\{-0.1\}$. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить функцию распределения $F(x)$

Вариант 2

Дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	**100**
P	$\mathrm{p}(0)$	$\mathrm{p}(1)$	$\mathrm{p}(2)$	$\mathrm{p}(3)$	$\mathrm{p}(4)$	$\cdots$	$p(100)$

где $\mathrm{p(k)} = \mathrm{C_n^k}(0.6)^{\mathrm{k}}(0.4)^{\mathrm{n-k}}$. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить функцию распределения $F(x)$

Дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	**100**
P	$\mathrm{p}(0)$	$\mathrm{p}(1)$	$\mathrm{p}(2)$	$\mathrm{p}(3)$	$\mathrm{p}(4)$	$\cdots$	$\mathrm{p}(100)$

где $p(k) = C_n^k(0.4)^k(0.6)^{n-k}$. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить функцию распределения $F(x)$

Дискретная случайная величина **X** распределена по геометрическому закону:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
P	$\mathrm{p}(0)$	$\mathrm{p}(1)$	$\mathrm{p}(2)$	$\mathrm{p}(3)$	$\mathrm{p}(4)$	$\cdots$

где $\mathrm{p(k)} = (0.2)^{\mathrm{k}-1}0.8$. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Начальные и центральные моменты: $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. Построить функцию распределения $F(x)$

Двумерная непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей: $f(x_1,x_2)=C\,exp\left\{-ax_1^2+2bx_1x_2-cx_2^2\right\}$, *где* $a^{-1}=1.5$, $b^{-1}=6$, $c^{-1}=6$. *Найти константу* C, $\mathrm{M}[X_1]$, $\mathrm{M}[X_2]$, $D[X_1]$, $D[X_2]$, $\sigma[X_1]$, $\sigma[X_2]$, $R_{X_1X_2}$, $f(x_1/x_2)$, $f(x_2/x_1)$, $\mathrm{M}[X_1/x_2]$, $\mathrm{M}[X_2/x_1]$. *Записать уравнение линейной среднеквадратической регрессии.*	*Двумерная непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей:* $f(x_1,x_2)=C\,exp\left\{-ax_1^2+2bx_1x_2-cx_2^2\right\}$, *где* $a^{-1}=24$, $b^{-1}=24$, $c^{-1}=6$. *Найти константу* C, $\mathrm{M}[X_1]$, $\mathrm{M}[X_2]$, $D[X_1]$, $D[X_2]$, $\sigma[X_1]$, $\sigma[X_2]$, $R_{X_1X_2}$, $f(x_1/x_2)$, $f(x_2/x_1)$, $\mathrm{M}[X_1/x_2]$, $\mathrm{M}[X_2/x_1]$. *Записать уравнение линейной среднеквадратической регрессии.*

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

20.2.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Алгебра событий. Классическое и статистическое определение вероятности события. Основные формулы комбинаторики: *перестановки, размещения, сочетания*.
2. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.
3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
6. Дискретная случайная величина. Закон распределения.
7. Примеры законов распределения: *бернулли*, *биноминальное*.
8. Примеры законов распределения: *пуассоновское*.
9. Примеры законов распределения: *геометрическое*.
10. Функция распределения случайной величины: определение, свойства, график.

11. Плотность распределения вероятностей: определение, свойства, вероятностный смысл, график.
12. Математическое ожидание случайной величины: определение, свойства. Математическое ожидание суммы одинаково распределенных случайных величин.
13. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины: определение, свойства. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение суммы одинаково распределенных случайных величин.
14. Центрированные и нормированные случайные величины. Мода и медиана. Начальные и центральные моменты.
15. Примеры законов распределения: *равномерное*.
16. Примеры законов распределения: *показательное*.
17. Примеры законов распределения: *распределение Гаусса (нормальное)*.
18. Примеры законов распределения: *распределение Релея.*
19. Примеры законов распределения: *распределение Максвелла*.
20. Примеры законов распределения: *гамма распределение.*
21. Примеры законов распределения: *распределение Лапласа.*
22. Неравенство Чебышева. Центральная предельная теорема.
23. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли.
24. Функция случайного аргумента. Распределение Пирсона, Стьюдента, Фишера-Снедекора.
25. Распределение линейной функции нормальной случайной величины.
26. Распределение суммы нормальных случайных независимых величин.
27. Двумерная случайная величина: дискретная и непрерывная. Функция распределения: определение, свойства.
28. Двумерная случайная величина: дискретная и непрерывная. Плотность совместного распределения вероятностей: определение, свойства, вероятностный смысл.
29. Условные законы распределения: определение, свойства. Плотность вероятностей составляющей двумерной случайной величины.
30. Условное математическое ожидание. Линейная средняя квадратическая регрессия.
31. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции.
32. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированность и зависимость случайных величин.

33. Нормальный закон распределения двумерной случайной величины.
34. Случайные функции. Математическое ожидание.
35. Случайные функции. Дисперсия.
36. Случайные функции. Корреляционная функция.
37. Стационарные случайные функции.
38. Эргодические случайные функции.
39. Статистическое оценивание параметров распределения. Основные свойства оценок.
40. Метод наибольшего правдоподобия. Оценка параметра λ показательного распределения.
41. Метод наибольшего правдоподобия. Оценка мат. ожидания нормального распределения.
42. Метод наибольшего правдоподобия. Оценка дисперсии нормального распределения.
43. Метод наибольшего правдоподобия. Оценка двух неизвестных параметров: мат. ожидания и дисперсии нормального распределения.
44. Проверка статистических гипотез. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Выбор статистического критерия.
45. Проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины.

20.2.2 Перечень практических заданий

1	*Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:* $$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}\mathrm{C}, \mathrm{x}\in[-1;1]\\ 0, \mathrm{x}\notin[-1;1]\end{cases}$$ *Найти константу* C, *функцию распределения* $F(x)$, *математическое ожидание* $\mathrm{M[X]}$, *дисперсию* $\mathrm{D[X]}$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(0<X<0.5)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*
2	*Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:* $$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}\mathrm{C}\exp\{-0.2\mathrm{x}\}, \mathrm{x}\ge 0\\ 0, \mathrm{x}<0\end{cases}$$ *Найти константу* C, *функцию распределения* $F(x)$, *математическое ожидание* $\mathrm{M[X]}$, *дисперсию* $\mathrm{D[X]}$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(0<X<1)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*
3	*Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:* $$\mathrm{F}(\mathrm{x})=\begin{cases}0, \mathrm{x}<0\\ 1-\mathrm{C}\exp\{-0.2\mathrm{x}\}, \mathrm{x}\ge 0\end{cases}$$

	Найти константу C, *плотность вероятности* $f(x)$, *математическое ожидание* $\mathrm{M[X]}$, *дисперсию* $\mathrm{D[X]}$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(0<X<0.2)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*
4	*Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:* $$\mathrm{F(x)}=\begin{cases}0, \mathrm{x}\in(-\infty;-2)\\ \mathrm{C(x+2)}, \mathrm{x}\in[-2;2]\\ 1, \mathrm{x}\in(2;\infty)\end{cases}$$ *Найти константу* C, *плотность вероятности* $f(x)$, *математическое ожидание* $\mathrm{M[X]}$, *дисперсию* $\mathrm{D[X]}$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(0<X<1)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*
5	*Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:* $$f(x)=C\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}$$ *Найти константу* C, *функцию распределения* $F(x)$, *математическое ожидание* $\mathrm{M[X]}$, *дисперсию* $\mathrm{D[X]}$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(-2<X<4)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану*
6	*Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:* $$F(x)=0.5+\Phi(x-1), \text{ где } \Phi(\mathrm{t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\mathrm{t}}\exp(-\mathrm{t}^2/2)\mathrm{dt}$$ *Найти константу* C, *плотность вероятности* $f(x)$, *математическое ожидание* $\mathrm{M[X]}$, *дисперсию* $\mathrm{D[X]}$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$, $P(-2<X<4)$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить графики* $f(x)$ *и* $F(x)$. *Найти моду и медиану.*
7	*Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона:* <table><tr><td>**X**</td><td>**0**</td><td>**1**</td><td>**2**</td><td>**3**</td><td>**4**</td><td>**…**</td></tr><tr><td>**P**</td><td>p(0)</td><td>p(1)</td><td>p(2)</td><td>p(3)</td><td>p(4)</td><td>…</td></tr></table> *где* $\mathrm{p(k)}=\frac{(0.1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k!}}\exp\{-0.1\}$. *Найти математическое ожидание* $\mathrm{M}[X]$, *дисперсию* $D[X]$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma[X]$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить функцию распределения* $F(x)$
8	*Дискретная случайная величина* **X** *распределена по геометрическому закону:* <table><tr><td>**X**</td><td>**0**</td><td>**1**</td><td>**2**</td><td>**3**</td><td>**4**</td><td>**…**</td></tr><tr><td>**P**</td><td>p(0)</td><td>p(1)</td><td>p(2)</td><td>p(3)</td><td>p(4)</td><td>…</td></tr></table> *где* $\mathrm{p(k)}=(0.2)^{\mathrm{k}-1}0.8$. *Найти математическое ожидание* $\mathrm{M}[X]$, *дисперсию* $D[X]$ *и среднее*

	квадратическое отклонение $\sigma[X]$. *Начальные и центральные моменты:* $\nu_1[X]$, $\nu_2[X]$, $\mu_1[X]$, $\mu_2[X]$. *Построить функцию распределения* $F(x)$
9	*Двумерная непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей:* $f(x_1,x_2)=C\,exp\left\{-ax_1^2+2bx_1x_2-cx_2^2\right\}$, *где* $a^{-1}=24$, $b^{-1}=24$, $c^{-1}=6$. *Найти константу* C, $\mathrm{M}[X_1]$, $\mathrm{M}[X_2]$, $D[X_1]$, $D[X_2]$, $\sigma[X_1]$, $\sigma[X_2]$, $R_{X_1X_2}$, $f(x_1/x_2)$, $f(x_2/x_1)$, $\mathrm{M}[X_1/x_2]$, $\mathrm{M}[X_2/x_1]$. *Записать уравнение линейной среднеквадратической регрессии.*
10	*Двумерная непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей:* $f(x_1,x_2)=C\,exp\left\{-ax_1^2+2bx_1x_2-cx_2^2\right\}$, *где* $a^{-1}=1.5$, $b^{-1}=6$, $c^{-1}=6$. *Найти константу* C, $\mathrm{M}[X_1]$, $\mathrm{M}[X_2]$, $D[X_1]$, $D[X_2]$, $\sigma[X_1]$, $\sigma[X_2]$, $R_{X_1X_2}$, $f(x_1/x_2)$, $f(x_2/x_1)$, $\mathrm{M}[X_1/x_2]$, $\mathrm{M}[X_2/x_1]$. *Записать уравнение линейной среднеквадратической регрессии.*

Для оценивания результатов обучения при промежуточной аттестации используются следующие показатели:

1) знание основных понятий теории вероятностей и математической статистики и их методов, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач;
2) знание постановки классических задач;
3) знание методов формулировки и доказательства математических утверждений;
4) умение применять методы теории вероятностей и математической статистики для решения задач профессиональной деятельности;
5) умение применять аппарат теории вероятностей и математической статистики для доказательства утверждений и теорем;
6) владение навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов теории вероятностей и математической статистики для решения практических задач решения различных задач;
7) владение навыками использования методов решения классических задач теории вероятностей и математической статистики для решения различных естественнонаучных задач.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины,способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины.	Отлично
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины,способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Хорошо
Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины,способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем(четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	Неудовлетворительно

20.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины, осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ. Критерии оценивания: решена одна задача - «удовл», решены две задачи – «хор», решены три задачи – «отл».

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

21. Фонд оценочных средств

Перечень заданий для проверки сформированности компетенции:

1) тестовые задания:

1. Классическое определение вероятности случайного события (напишите формулу и поясните буквенные обозначения).

   Ответ

   Классической вероятностью события A называется отношение $P(A)$:

$$P(A) = \frac{M_A}{N}$$

   где M_A - число элементарных исходов благоприятных событию A, N - общее число элементарных исходов.

2. Статистическое определение вероятности случайного события (напишите формулу и поясните буквенные обозначения).

   Ответ

   Частотой события A называют отношение $W_N(A)$:

$$W_N(A) = \frac{M_A}{N},$$

   где M_A - число испытаний серии, в которых появилось событие A, N - общее число испытаний в серии. Статистической вероятностью события A называют предел, к которому стремится частота события A при бесконечно большом числе испытаний в серии:

$$W_N(A) \xrightarrow[N\to\infty]{} P(A).$$

3. Теорема сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.

   Ответ

   Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

   Вероятность суммы совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

4. Теорема умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.

   Ответ

   Вероятность произведения зависимых событий A и B равняется вероятности одного события, умноженной на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

   Вероятность произведения независимых событий A и B равняется произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

5. Формула полной вероятности.

Ответ

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_N$ совокупность событий, удовлетворяющих условиям: совокупность событий $B_1, B_2, \ldots, B_N$ является полной группой событий: $B_1 + B_2 + \ldots + B_N = \sigma$, любые два события группы B_i и B_j являются несовместными событиями: $B_i B_j = \gamma$, тогда полная вероятность события А определяется выражением:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_N)P_{B_N}(A).$$

6. Формула Байеса для апостериорной вероятности гипотезы.

Ответ

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_N$ совокупность событий, удовлетворяющих условиям: совокупность событий $B_1, B_2, \ldots, B_N$ является полной группой событий: $B_1 + B_2 + \ldots + B_N = \sigma$, любые два события группы B_i и B_j являются несовместными событиями: $B_i B_j = \gamma$, тогда условная вероятность события B_i при условии, что событие A произошло (т.е. “апостериорная” вероятность) определяется выражением:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_i P(B_j)P_{B_j}(A)}.$$

7. Формула Бернулли для вероятности появления события А ровно k раз в серии из n одинаковых независимых испытаний

Ответ

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где n - количество испытаний в серии, k - количество появлений события А, $P(A) = p$ - вероятность появления события А в одном отдельном испытании, $P(\overline{A}) = q = 1 - p$ - вероятность непоявления события А в одном отдельном испытании.

8. Определение и свойства функции распределения вероятностей

Ответ

Функцией распределения случайной величины (дискретной или непрерывной) называется функция $F(x)$, определяемая вероятностью того, что в результате испытания значение случайной величины X будет меньше, чем аргумент x:

$$F(x) \overset{def}{=} P(X < x)$$

Свойства функции распределения вероятностей.

1) $0 \le F(x) \le 1$.

2) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

3) Функция распределения случайной величины – неубывающая функция своего аргумента, т.е. для любых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство: $F(x_1) \le F(x_2)$.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

9. Определение и свойства плотности распределения вероятностей.

Ответ

Функцией плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют функцию $f(x)$, определяемую производной функции распределения вероятностей:

$$f(x) \overset{def}{=} \frac{dF(x)}{dx}$$

Свойства плотности распределения вероятностей.

1) $f(x) \ge 0$

2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (условие нормировки).

4) $P(x_1 \le X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

5) $f(x_0) \approx \dfrac{P(x_0 \le X < x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$ (вероятностный смысл).

10. Определение и свойства математического ожидания случайной величины.

Ответ

Математическим ожиданием $M[X]$ случайной величины X называется неслучайная величина, определяемая выражением:

$$M[X] = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_i, & \text{еесли } X \text{ дискретная случайная величина.} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & \text{если } X \text{ непрерывная случайная величина.} \end{cases}$$

Свойства математического ожидания случайной величины.

1) $M[C] = C$.

2) $M[X + C] = M[X] + C$.

3) $M[CX] = CM[X]$.

4) $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$.

5) $M[XY] = M[X]M[Y]$.

11. Определение и свойства дисперсии случайной величины.

<u>Ответ</u>

Дисперсией $D[X]$ случайной величины X называется неслучайная величина, определяемая выражением:

$$D[X]=M\left[\left(X-M[X]\right)^2\right]$$

Свойства дисперсии случайной величины.

1) $D[X]=M[X^2]-(M[X])^2$.
2) $D[C]=0$.
3) $D[X+C]=D[X]$.
4) $D[CX]=C^2D[X]$.
5) $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$.

12. Среднее квадратичное отклонение случайной величины и ее свойства.

<u>Ответ</u>

Средним квадратичным отклонением $\sigma[X]$ случайной величины X называется неслучайная величина, определяемая выражением:

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$$

Свойства среднего квадратичного отклонения случайной величины.

1) $\sigma[X]=\sqrt{M[X^2]-(M[X])^2}$.
2) $\sigma[C]=0$.
3) $\sigma[X+C]=\sigma[X]$.
4) $\sigma[CX]=C\sigma[X]$.
5) $\sigma[X+Y]=\sqrt{\sigma^2[X]+\sigma^2[Y]}$, где X и Y - независимые случайные величины.

13. Определение начального и центрального момента случайной величины.

<u>Ответ</u>

Начальным моментом порядка n ($\nu_n[X]$) случайной величины X называется неслучайная величина, определяемая выражением:

$$\nu_n[X]=M[X^n]$$

Центральным моментом порядка n ($\mu_n[X]$) случайной величины X называется неслучайная величина, определяемая выражением:

$$\mu_n[X] = M\left[\left(X - M[X]\right)^n\right]$$

14. Нормальный закон распределения случайной величины: функция распределения вероятностей, функция плотности распределения вероятности, правило “трех сигм”.
Ответ

Функция распределения вероятностей:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$$

Функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = \exp\{-(x-m)^2 \big/ 2\sigma^2\} \big/ \sqrt{2\pi\sigma^2} \ .$$

Правило “трех сигм”:

$$P(\left|X - M[X]\right| < 3\sigma) = 1.$$

15. Случайная величина с распределением Бернулли: математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты.
Ответ

Пусть случайная величина X имеет два возможных значения $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ с вероятностями: $P(X = x_1) = p$, $P(X = x_2) = q = 1 - p$, тогда распределение вероятностей случайной величины X называется распределением Бернулли с параметрами p, $q = 1 - p$.

X	1	0
P	p	$q = 1 - p$

Числовые характеристики.

$$M[X] = \sum_i^N x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p \ .$$

$$M[X^2] = \sum_i^N x_i^2 p_i = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p \ .$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \ .$$

$$v_1[X] = p \ , \ v_2[X] = p \ .$$

$$\mu_1[X] = 0, \ \mu_2[X] = pq \ .$$

2) расчетные задачи:

1. В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные - жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.
Ответ: $P(A) = 0.46$.

$$P(A) = \frac{M_A}{N}$$

где $M_A = 50 - 27$ - число элементарных исходов благоприятных событию A, $N = 50$ - общее число элементарных исходов.

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{23}{50} = 0.46$$

2. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95. Для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
Ответ: $P(A) = 0.85$.

B_1 - винтовка с оптическим прицелом, $P(B_1) = \frac{3}{5} = 0.6$, $P_{B_1}(A) = 0.95$.

B_2 - винтовка с оптическим прицелом, $P(B_2) = \frac{2}{5} = 0.4$, $P_{B_2}(A) = 0.7$.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) =$$
$$= 0.6 \times 0.95 + 0.4 \times 0.7 = 0.85$$

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} C, x \in [-1;1] \\ 0, x \notin [-1;1] \end{cases}$$

Найти константу C.
Ответ: $C = 0.5$.
Согласно условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} Cdx = C(x_2 - x_1) = 1$$

Таким образом, $C = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{1-(-1)} = 0.5$

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\{-0.2x\}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Найти константу C.

Ответ: $C = 0.25$.

Согласно условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} C\exp(-\lambda x)dx = -\frac{C}{\lambda}\exp(-\lambda x)\Big|_0^{\infty} = 1$$

Таким образом, $C = \lambda = 0.25$

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = C\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}$$

Найти константу C.

Ответ: $C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Согласно условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} C\exp\{-(x-m)^2 / 2\sigma^2\}dx = 1$$

Введем новую переменную интегрирования:

$$t = \frac{x-m}{\sigma},\ dt = \frac{dx}{\sigma}$$

В результате, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-t^2/2\}dx = 1.$

Учитывая, что: $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\exp\{-t^2/2\}dx = \sqrt{\pi/2}$

Таким образом, $C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0.25, x \in [1;5] \\ 0, x \notin [1;5] \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$

Ответ: $\mathrm{M}[X] = 3$.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \int_{x_1}^{x_2}\frac{tdt}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2} = 3$$

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0.5\exp\{-0.5x\}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$

<u>Ответ</u>: $\mathrm{M}[X]=2$.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt=\lambda\int_{0}^{\infty} t\exp(-\lambda t)dt=$$

$$=-t\exp(-\lambda t)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)dt=-\frac{\exp(-\lambda t)}{\lambda}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0.5}=2$$

8. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-2)^2}{8}\right\}$$

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$.

<u>Ответ:</u> $\mathrm{M}[X]=2$.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} t\exp\{-(t-m)/2\sigma^2\}dt$$

Введем новую переменную интегрирования:

$$z=\frac{t-m}{\sigma},\ dz=\frac{dt}{\sigma}.$$

В результате, $M[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(z+m)\exp\{-z^2/2\}dt=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\exp\{-z^2/2\}dt+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-z^2/2\}dt=m=2$$

9. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0.5, x\in[-1;1]\\ 0, x\notin[-1;1]\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X^2]$.

<u>Ответ:</u> $\mathrm{M}[X^2]=\frac{1}{3}$.

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt=\int_{x_1}^{x_2}\frac{t^2dt}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{3}=\frac{1}{3}$$

10. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2\exp\{-0.2x\}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X^2]$.

Ответ: $\mathrm{M}[X^2] = 50$.

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{\infty} t^2 \exp(-\lambda t)dt =$$

$$= -t^2 \exp(-\lambda t)\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} t\exp(-\lambda t)dt = \frac{2}{\lambda^2} = 50$$

11. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = C\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}$$

Найти дисперсию $D[X]$.

Ответ: $D[X] = 1$.

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - M[X])^2 f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-m)^2 \exp\{-(t-m)^2 / 2\sigma^2\}dt$$

Введем новую переменную интегрирования:

$$z = \frac{t-m}{\sigma},\ dz = \frac{dt}{\sigma}.$$

$$D[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\{-z^2 / 2\sigma^2\}dt$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\{-z^2/2\}dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-z\exp(-z^2/2)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-z^2/2\}dt\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2 = 1.$$

12. Задана случайная величина Бернулли:

X	1	0
P	$p = 0.4$	$q = 1 - p = 0.6$

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$

Ответ: $\mathrm{M}[X] = 0.4$

$$M[X] = \sum_{i}^{N} x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p = 0.4\,.$$

13. Задана случайная величина Бернулли:

X	1	0
P	$p = 0.7$	$q = 1 - p = 0.3$

Найти дисперсию $M[X^2]$

Ответ: $M[X^2] = 0.7$

$$M[X^2] = \sum_{i}^{N} x_i^2 p_i = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p = 0.7\,.$$

14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 3) \\ 0.25(x-3), x \in [3;9] \\ 1, x \in (9; \infty) \end{cases}$$

Найти плотность вероятностей $f(x)$.

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0.25, x \in [3;9] \\ 0, x \notin [3;9] \end{cases}$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 3) \\ 0.25, x \in [3;9] \\ 0, x \in (9; \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0.25, x \in [3;9] \\ 0, x \notin [3;9] \end{cases}$$

15. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - \exp\{-0.2x\}, x \geq 0 \end{cases}$$

Найти плотность вероятностей $f(x)$.

<u>Ответ:</u> $$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0.2\exp\{-0.2x\}, x \geq 0 \end{cases}$$